

# DFG Forschungsgruppe FOR 1548 Geometry & Physics of Spatial Random Systems

DFG FORSCHERGRUPPE  
Geometry & Physics of  
Spatial Random Systems



## Zusammenfassung

Die physikalischen Eigenschaften räumlich komplexer, strukturierter Materie (poröse und zelluläre Materialien, granulare Packungen, ungeordnete Netzwerke) hängen in hohem Maße von ihrer geometrischen Struktur ab. Das Ziel der interdisziplinären Forschungsgruppe bestand darin, moderne mathematische Methoden der Integral- und Stochastischen Geometrie für die morphologische Analyse solcher Strukturen einzusetzen. Dabei sollten die sich aus den physikalischen Fragestellungen ergebenden mathematischen Herausforderungen ganz maßgeblich zu einer Weiterentwicklung oder sogar zum Entstehen neuer mathematischer Methoden beitragen. Ein übergreifendes Ziel der Forschungsgruppe bestand darin, den vorhandenen konzeptionellen und kulturellen Graben zwischen Mathematik und Physik zu überbrücken. In der Forschungsgruppe haben Wissenschaftler aus Karlsruhe (Mathematik), aus Erlangen-Nürnberg (Physik) und aus Aarhus (Mathematik) sehr erfolgreich zusammengearbeitet. Die Forschungsthemen der Gruppe wurden dabei in sechs inhaltlich breit gefächerten Projekten bearbeitet: Tensor-Bewertungen räumlicher Strukturen, Modellierung von Mosaiken und Hard-Core-Modellen, geometrische Kenngrößen Boolescher Modelle, Geometrie zufälliger Felder, stetige Perkolation, sowie Bildanalyse und räumliche Statistik.

Die im ersten Projekt untersuchten Tensor-Bewertungen waren für alle anderen Projekte von grundlegender Bedeutung. Hier ist es wie geplant gelungen, lokale Tensor-Bewertungen zu klassifizieren und zu charakterisieren. Damit konnten klassische und jüngere Ergebnisse der Konvex- und Integralgeometrie erheblich erweitert und erfolgreich in der Physik komplexer Fluide durch eine tensorbasierte Dichtefunktionaltheorie angewendet werden. Im Projekt konnten auch integralgeometrische Formeln für Tensor-Funktionale hergeleitet werden. Diese sind für viele Fragen in der Stochastischen Geometrie und Anwendungen sowohl in der Stereologie als auch in der Statistischen Physik von herausragender Bedeutung.

Stellvertretend für die im zweiten Projekt erzielten Ergebnisse soll hier die computergestützte Untersuchung der Struktur von ungeordneten Packungen nicht kugelförmiger Partikel genannt werden. Unter Ausnutzung tomographischer Methoden und von Minkowski-Tensoren wurden fundamentale Resultate zu diesen wichtigen ungeordneten Systemen erzielt. Diese haben zu einem tieferen Verständnis der strukturbildenden Prozesse und der Physik granularer Materialien geführt. Die von der Forschungsgruppe entwickelten Strukturmetriken sind breit auf andere partikuläre Systeme anwendbar.

Auch im dritten Projekt hat es mit der Herleitung expliziter Formeln für die Korrelationen zwischen Minkowski-Funktionalen Boolescher Modelle sowie mit dem Beweis quantitativer Zentraler Grenzwertsätze einen echten Durchbruch gegeben. Wesentliche Hilfsmittel waren dabei neben integralgeometrischen Methoden neue probabilistische Hilfsmittel (Stein-Malliavin Methode, Chaosentwicklung von Funktionalen Poissonscher Prozesse), an deren Entwicklung die Forschungsgruppe ganz maßgeblich mitgewirkt hat.

Ein Highlight des vierten Projekts über zufällige Felder war die Entwicklung eines sensitiven morphometrischen Nullhypotesentests zur Detektion astrophysikalischer Quellen. Die Kombination der Minkowski Funktionale führt schlagartig zu einer deutlichen Erhöhung der Nachweiswahrscheinlichkeit. Diese Methode der Minkowski Maps hat das Potential zu einem Standardwerkzeug in der Bilderkennung zu werden und nicht nur in der Astronomie, sondern zum Beispiel auch in der Tumorthherapie eingesetzt zu werden.

Ein interessantes Ergebnis des fünften Projekts ist der Nachweis eines grundlegenden Unterschieds zwischen anisotropen effektiven Perkolationsschwellen und ihrem isotropen thermodynamischen Grenzwert, sowie dessen näherungsweise aber expliziter Vorhersage.

Im sechsten Projekt haben alle Arbeitsgruppen erfolgreich an der algorithmischen und statistischen Umsetzung einiger theoretischen Ergebnisse gearbeitet. Ein schönes Resultat ist etwa die Rekonstruktion konvexer Mengen aus Daten der Minkowski-Tensoren.

Die von der Forschungsgruppe entwickelten numerischen Werkzeuge zur Berechnung der Tensor-Bewertungen sind als freie Software unter den Namen „Papaya“ (2D Version) und „Karambola“ (3D Version) verfügbar gemacht worden. Die Forschungsgruppe hat mit [www.morphometry.org](http://www.morphometry.org) auch ein interaktives Online-Tool entwickelt. Es ermöglicht die pädagogische Exploration der Konzepte der Minkowski-Tensoren und wird für deren breite Verwendung wichtig sein.